

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

<b>по дисциплине:</b>	Дополнительные главы топологии
<b>по направлению:</b>	Информатика и вычислительная техника
<b>профиль подготовки:</b>	Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	4
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 1

Программу составил: Г.Г. Гусев, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

## Аннотация

В курсе рассматриваются некоторые дополнительные главы из топологии. В частности: задача обращения функции, многозначная комплексная функция  $f: C \rightarrow C$ , топологическое накрытие и другие актуальные вопросы топологии.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

освоение основных современных методов топологии.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в топологии;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в топологии;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических ис-следований в топологии.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре)	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценить качество разработанной модели
	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

новые научные результаты	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- ☐ фундаментальные понятия, законы, теории топологии;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов топологии;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла топологии;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач топологии.

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в топологии в устной и письменной форме.

владеть:

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач топологии ( в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- ☐ предметным языком топологии и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Топологические пространства, открытые и замкнутые множества.	4	4		6
2	Линейная связность.	6	6		6
3	Хаусдорфовость.	8	8		6

4	Одномерные и двумерные многообразия.	6	6		6
5	Планарность графов и плоские графы.	6	6		6
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

1. Топологические пространства, открытые и замкнутые множества.

Непрерывные отображения.

2. Линейная связность.

Фундаментальная группа пространства с выделенной точкой.

3. Хаусдорфовость.

Понятие клеточного комплекса. Различные варианты формулировки аксиомы (W).

4. Одномерные и двумерные многообразия.

Классификация одномерных многообразий.

5. Планарность графов и плоские графы.

Доказательство непланарности графов  $K_5$  и  $K_{3,3}$ .

#### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

#### 6. Перечень рекомендуемой литературы

##### Основная литература

1. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии [Текст] : учебник для вузов / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. — М. : Физматлит, 2004. — 304 с. — (Классический университетский учебник). - ISBN 5-9221-0442-X (в пер.) — Полный текст (Режим доступа : доступ из сети МФТИ).

##### Дополнительная литература

1. Топология для физиков [Текст] : уч. пособие для вузов / Ю. А. Бычков ; Гос. ком. РФ по высш. образов., Моск. физико-техн. ин-т. — М. : Изд-во МФТИ, 1993. — 108 с.

#### 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

<http://web.stanford.edu/class/ee364b/lectures.html>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Информатика и вычислительная техника

**профиль подготовки:** Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
кафедра дискретной математики

**курс:** 4

**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** Г.Г. Гусев, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре)	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценить качество разработанной модели
	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дополнительные главы топологии» обучающийся должен:

**знать:**

- ☐ фундаментальные понятия, законы, теории топологии;
- ☐ современные проблемы соответствующих разделов топологии;
- ☐ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла топологии;
- ☐ основные свойства соответствующих математических объектов;
- ☐ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач топологии.

**уметь:**

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение;
- ☐ самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- ☐ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- ☐ точно представить математические знания в топологии в устной и письменной форме.

**владеть:**

- ☐ навыками освоения большого объема информации и решения задач топологии ( в том числе, сложных);
- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- ☐ предметным языком топологии и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

**3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю**

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

**4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Топологические пространства, открытые и замкнутые множества, непрерывные отображения.
2. Линейная связность. Гомотопия путей - определение, симметричность и транзитивность.
3. Произведение путей - независимость от выбора класса эквивалентности. Определение фундаментальной группы пространства с выделенной точкой.
4. Ассоциативность фундаментальной группы.
5. Существование единицы и обратного элемента в фундаментальной группе.
- Вычисление фундаментальной группы выпуклого множества.
- Фундаментальная группа окружности с доказательством.
6. Применения фундаментальной группы: теорема Брауэра, Основная Теорема Алгебры.
7. Хаусдорфовость топологического пространства, пример нехаусдорфова пространства. Понятие клеточного комплекса. Образ при характеристическом отображении совпадает с замыканием клетки, даже если аксиома (W) не выполнена - доказательство.
8. Различные варианты формулировки аксиомы (W), их эквивалентность (с полным доказательством). Пример комплекса, неудовлетворяющего аксиоме (W).
9. Клеточные разбиения одномерных комплексов, сфер и дисков.
10. Клеточные разбиения двумерных поверхностей.
11. Понятие подкомплекса, d-мерного остова, локально-конечного комплекса. Разбиение на клетки декартового произведения двух клеточных комплексов. Достаточное условие того, что полученное разбиение является клеточным комплексом (без доказательства).
12. Необходимое и достаточное условие непрерывности отображения из клеточного комплекса в топологическое пространство (с доказательством).
13. Теорема Борсука (идеи доказательства). Если подкомплекс стягиваем, то фактор комплекса по нему гомотопически эквивалентен исходному комплексу (с доказательством).



14. Изоморфизм фундаментальных групп клеточного пространства и его двумерного остова. Вычисление фундаментальной группы клеточного пространства  $X$  с единственной вершиной (формулировка, без доказательств).
15. Клеточные гомологии – определение цепного комплекса и его гомологии.
16. Клеточные гомологии одномерных комплексов, сфер и дисков – вычисление через клеточное разбиение.
17. Клеточные гомологии двумерных поверхностей – вычисление через клеточное разбиение.
18. Определение 71-мерного топологического многообразия без края. Классификация 0-мерных и 1-мерных связных многообразий.
19. Однородный 2-мерный симплициальный комплекс как топологическое пространство, склеенное из треугольников по сторонам. Теорема о триангуляции 2-мерного многообразия (без доказательства).
20. Двойственный граф триангулированного 2-мерного многообразия. Разрезание триангуляции с использованием остовного дерева двойственного графа. Лемма: любое 2-мерное многообразие гомеоморфно  $2n$ -угольнику, стороны которого разбиты на пары, и каждая пара сторон склеена одним из двух возможных способов.
21. Леммы о склейках многоугольников: вклеивание ленты Мебиуса, ручки. Доказательство теоремы о классификации связных компактных двумерных многообразий.

Темы для курсовых работ:

1. Аксиоматическое определение аддитивной эйлеровой характеристики. Вычисление эйлеровой характеристики произвольного объединения клеток конечного клеточного комплекса.
2. Планарность графов и плоские графы. Понятие грани плоского графа, формула Эйлера (с доказательством). Топологическая интерпретация формулы (эйлерова характеристика).

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.